STORIA

DEL PRINCIPIO DELLA MINIMA AZIONE

PRELEZIONE ACCADEMICA

DEL D.R ADOLFO MAYER

PROFESSORE DI MATEMATICHE NELLA R. UNIVERSITA' DI LIPSIA,
SOCIO DELLA R. SOCIETA' DELLE SCIENZE DI SASSONIA,
E CORRISPONDENTE DELLA R. SOCIETA' DELLE SCIENZE DI GOTTINGA

TRADUZIONE DAL TEDESCO

DELL' ING.RE G. B. BIADEGO

ESTRATTO DAL *BULLETTINO DI BIBLIOGRAFIA E DI STORIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE*
TOMO XI. — MARZO 1878.

ROMA
TIPOGRAFIA DELLE SCIENZE MATEMATICHE E FISICHE
Via Lata, N. 3.

1878

Digitized by Google

QA 871
.M466

INDIANA UNIVERSITY LIBRARY

Digitized by Google

STORIA DEL PRINCIPIO DELLA MINIMA AZIONE

PRELEZIONE ACCADEMICA. (*)

TRADUZIONE DAL TEDESCO

1-3-57

Spettabile Adunanza

Se è grande l'attenzione e l'interessamento che ponno destare in noi le biografie degli uomini grandi, è cosa ben più feconda d'insegnamenti il seguire nelle sue fasi una teoria importante, un principio rimarchevole, ricercando com'è sorto, e come s'è sviluppato ed è pervenuto nel corso del tempo alla sua perfezione. È una tale storia che io vorrei presentarvi, e ciò che mi ha spinto a scegliere appunto a tema del mio dire il principio della minima azione non è stata in ultima parte l'oscurità e la confusione che hanno intessuto intorno a questo principio ed intorno alle sue relazioni colla storia delle scienze un velo misterioso, e che si manifestano anche senz'altro, ed in un modo caratteristico nel suo nome tedesco che suona: « Principii della minima azione », poichè questo nome in fondo esprime precisamente il contrario di ciò che per lungo tempo si è considerato come sostanza essenziale del principio, e come una delle grandi leggi fondamentali della natura.

Intorno al modo con cui sorse tra noi il principio nella minima azione possiamo trarre notizie dalle lettere di Daniele Bernoulli a Leonardo Eulero, che il pronipote dell'Eulero, Paolo Enrico di Fuss ha pubblicate nel secondo volume della sua « Correspondance mathématique et physique de » quelques célèbres géomètres du XVIII^me^ siècle », mentre le risposte d'Eulero andarono fatalmente perdute.

(*) Il testo tedesco di questo scritto trovasi in un opuscolo intitolato « GESCHICHTE || DES || PRIN- » CIPS DER KLEINSTEN ACTION. || AKADEMISCHE ANTRITTSVORLESUNG || VON || Dr. ADOLPH MAYER,|| » A. O. PROFESSOR DER MATHEMATIK AN DER UNIVERSITÄT LEIPZIG, || MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. » GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN UND CORRESPONDENT DER || K. GESELLSCHAFT DER WISSEN- » SCHAFTEN ZU GÖTTINGEN. || LEIPZIG, || VERLAG VON VEIT & COMP. || 1877 », e composto di 32 pagine, in 8°, delle quali le 1ª—3ª, 32ª non sono numerate, e le 4ª—31ª sono numerate coi numeri 4—31.

Digitized by Google

Dacchè, verso la fine del 17 secolo, era stato posto da Giovanni Bernoulli il il celebre problema della brachistocrona, della curva cioè di più rapida discesa, l'interesse dei matematici s'era rivolto con predilezione ai problemi isoperimetri a quei problemi cioè, nei quali una curva deve essere determinata in modo che un dato integrale assuma per essa il valore più grande o più piccolo tra quelli che esso assume per tutte le altre curve affini; e non v'è nessuno di quella grande schiera di scienziati di prim' ordine che vissero a quel tempo, il quale non si sia provato a porre od a risolvere uno di tali quesiti. E così noi troviamo anche nella 3ª decina del secolo XVIII, Daniele Bernoulli occupato a ricondurre a problemi isoperimetri alcuni difficili questioni della statica come quelle del filo e della verga elastica. Con tale procedimento si ottiene (il che costituisce sempre un rilevante vantaggio) di adoperare due metodi affatto diversi nella trattazione del medesimo problema e Daniele Bernoulli trovò che i suoi Problemi statici si trattavano col metodo degl' isoperimetri più facilmente che coll'ajuto dei noti principii della meccanica. Ora perchè non doveva, ciò ch' era riuscito per l'equilibrio, esser possibile anche pel movimento? In dinamica si annetteva il maggior interesse al problema del moto sotto l'azione delle forze centrali. Era quindi naturalissimo che Daniele Bernoulli si facesse la domanda se anche »Orbitas circa centra virium» si potesserò ottenere «methodo iso-»perimetrica» (*), ed era pure altrettanto naturale ch' egli presentasse la questione a quell' uomo che già allora anche nella teoria degl' isoperimetri s'era lasciato addietro di gran lunga tutti i suoi predecessori.

Pare che la risposta a tale questione non sia riuscita facile all'Euler. Poichè scorsi appena due anni (**) Daniele Bernoulli vi torna su e con maggiore insistenza. Ma più tardi, nel Marzo 1743, Euler ha trovato la soluzione; poichè in una lettera del 23 Aprile del medesimo anno Daniele Bernoulli si rallegra con lui per questà sua bella scoperta.

Ora questa scoperta che Eulero pubblicò la prima volta nell' autunno 1744 nella seconda Appendice intitolata « de motu projectorum » della sua celebre opera sui problemi isoperimetri, è il caso il più semplice della forma vera ed esatta del principio della minima azione. Vedremo che questa forma vera nel progresso del tempo gli andò smarrita, e che egli dovea tosto perdere in rigore ciò che parve guadagnare in generalità.

Ma per evitare di ripetere due volte la medesima cosa, permettete, o signori, che senza osservare l'ordine del tempo, io vi formuli fino da ora il vero principio della minima azione, nella sua piena generalità, come fu circa cento

---

(*) Lettera del 28 Genn. 1741.
(**) Lettera del 12 Dec. 1742.

Digitized by Google

anni più tardi stabilito la prima volta da Jacobi, mediante una generalizzazione diretta della proposizione Euleriana (*).

Se un sistema di punti materiali è soggetto puramente ad attrazioni vicendevoli dei punti, e ad attrazioni che emanano da centri fissi, la risultante di tutte le forze operanti su un punto qualunque del sistema, determinata in intensità e direzione, si può esprimere assai semplicemente in funzione delle masse e delle coordinate dei punti col mezzo di una unica funzione, la funzione delle forze (*Kräftefunction*), ed in uno spazio privo di resistenze, il moto del sistema obbedisce al noto principio della conservazione della forza viva, vale a dire che, insino a tanto che non si introducono urti nel sistema, la forza viva del medesimo si mantiene costante, ossia che la semisomma dei prodotti rispettivi della massa d'ogni punto nel quadrato della sua velocità, diversifica dalla funzione delle forze di una quantità costante. Il valore di questa costante riesce completamente determinato una volta che, come presuppongo in seguito, sia conosciuta la grandezza della forza viva in una posizione qualunque del sistema, e questa posizione medesima sia perfettamente determinata, e la proposizione vale sempre sia che il sistema sia libero, o pure vincolato ad alcune condizioni, ammesso solo che le equazioni che esprimono queste condizioni siano indipendenti dal tempo.

Ora col principio della conservazione della forza viva vale sempre anche il principio della minima azione che si esprime così:

« Se si moltiplica la somma dei prodotti di ogni massa nel quadrato del » corrispondente elemento di trajettoria, col valore che si ottiene dal princi- » pio della forza viva per la doppia forza viva, l'integrale della radice qua- » drata di questo prodotto, preso tra due posizioni date del sistema, ha la » proprietà di diventare per l'effettiva trajettoria del sistema minore che per tutte » le altre trajettorie, che il sistema potrebbe percorrere tra le due posizioni » date senza che si alterino le condizioni prescritte (**).

E quantunque debbasi qui, a dir vero, notare una certa limitazione, in quanto che quell'integrale non deve sempre diventare necessariamente un vero minimo, pure io posso senza inconvenienti passarvi sopra qui, poichè è cosa indifferente per la dinamica. Il vero valore della proposizione è di natura puramente formale: esso consiste puramente e semplicemente in ciò che essa, in quanto vale il principio della forza viva insegna a ricondurre la determinazione della tra-

(*) Nelle carte mss. lasciate da *Jacobi* si trovano molti appunti, pur troppo sconnessi, per una più compiuta storia del principio della minima azione, dai quali trassi molto partito. Essi contengono anche considerazioni assai eleganti tendenti a rendere più intuitivo il principio stesso della minima azione riconducendo l'azione al tempo, ed il problema dinamico ad un problema brachistocrono.

(**) Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, pag. 45.

Digitized by Google

jettoria, e quindi poichè se la trajettoria è conosciuta, il tempo si deduce dal principio con una semplice quadratura, anche quella del moto del sistema ad un Problema del Calcolo delle variazioni, e la forma complicata dell'integrale che vi si incontra, mostra già per sè, che sarebbe impossibile di scoprire pel principio una causa metafisica.

Precisamente nella medesima forma, solo che in luogo d'un sistema di punti si ha un unico punto, si presenta la proposizione in ognuno degli esempi che l'Euler ha successivamente esaminato, e dai quali egli deduce il suo principio, dimostrando come dalla condizione che quell'integrale diventi un minimo si ottengono le medesime curve, cioè le medesime equazioni differenziali, che si ottengono per la trajettoria del punto seguendo le regole della dinamica. Ma l'Euler esprime in modo diverso il risultamento generale della sua ricerca.

Se cioè nel predetto integrale alla funzione delle forze si sostituisca il valore derivante dall'equazione della forza viva, e con ciò si torni ad introdurre nell'integrale la stessa forza viva, esso si presenta come l'integrale della doppia forza viva preso rispetto al tempo, ovvero anche come l'integrale della somma dei prodotti della massa d'ogni punto moltiplicata risp. per la sua velocità e pel suo elemento di trajettoria: e quindi si può anche esprimere la proposizione dicendo che, sotto le medesime condizioni di cui precedentemente, quest'ultimo integrale diventa un minimo, ammesso che si abbia espresso per mezzo del principio della forza viva tutto ciò che è sotto l'integrale in funzione di quantità riferite solo alla trajettoria del sistema (*).

In questa forma l'Euler esprime la sua proposizione in generale pel moto d'un unico punto, ed egli mette espressamente ben in rilievo primieramente che essa non può valere, se non ha luogo il principio della forza viva; quindi p. es. non può valere per movimenti che hanno luogo in un mezzo resistente (**), poi che nell'integrale si deve esprimere esplicitamente la velocità « ex viribus » sollicitantibus per quantitates ad curvam pertinentes » (***).

Ma da che cosa però ha origine il nome di principio della minima azione? Per farvi apprender ciò permettetemi, ora che abbiamo conosciuto le origini e l'ultima parola del principio, di intesservi la storia delle sue vicende.

Mentre l'opera di Eulero, come già fu detto, veniva in luce la prima volta nell'autunno del 1744, il Maupertuis avea presentato nel giorno 15 Aprile del medesimo anno all'Accademia di Parigi una memoria, nella quale, egli per ispiegare i fenomeni della riflessione e rifrazione della luce sostituiva un' ipotesi arbitraria al principio del Fermat del tempo minimo, il quale era in opposizione alle idee di

(*) Jacobi, Vorlesungen über Dynamik, pag, 44.
(**) De motu projectorum, 13, 14, 16.
(***) Ib. 2.

Digitized by Google

allora (*). Qui per altro Maupertuis non parla ancora che del moto della luce. Ma due anni più tardi, dopo avere intanto assunto la presidenza dell'Accademia di Berlino, conferitagli con uno straordinario apparato di pompa, estese questa ipotesi in generale ad ogni movimento, e nelle Memorie di Berlino del 1746 la espose come il principio generale dell'equilibrio e del movimento. Pel movimento egli si esprime così: « quando in natura avviene una variazione, la » quantità di azione necessaria per questa variazione è la minima », e come base dell'equilibrio egli ammette « che nel riposo i corpi che si fanno equi- » librio devono prendere tali posizioni reciproche, che, se si comunica ad essi » un piccolo movimento, la quantità di azione da ciò generata è la minima ».

Qui egli, seguendo le orme del Leibniz, intende per azione (la qual voce qui non è presa nel senso di « Wirkung » (azione), ma deve piuttosto indicare « Thätigket » (energia)) il prodotto della massa dei corpi per la loro velocità, e per lo spazio da essi percorso.

Come dimostrazione del suo principio il Maupertuis ne deduce le note leggi dell'urto di corpi perfettamente rigidi, e perfettamente elastici ed il principio della leva. E questo iusieme colla primitiva deduzione della legge della riflessione e rifrazione costituisce tutto ciò che il Maupertuis produce come base del suo «principio della minima quantità di azione», cioè di quella grande legge che regola l'economia della natura, e la cui mirabile verità deve dimostrare l'esistenza di Dio in un modo più splendido e più nobile che nol facciano la struttura delle piante e degli animali, od il moto dei pianeti.

Per riconoscere con qual debole base fosse proposto il principio emesso con tanta pompa, basta sfogliare le due memorie che vi scrisse contro il Chevalier d'Arcy (celebre pel principio della conservazione delle aree da lui stabilito) nelle Memorie di Parigi del 1749 e 1752, e nelle quali egli dimostra come il Maupertuis tratti in un modo al tutto arbitrario, ciò ch'egli chiama quantità di azione necessaria alla variazione, e come, se in generale si voglia annettere un senso preciso a questa parola debbasi per lo più intendere con essa qualche cosa di ben diverso da ciò che intende il Maupertuis, che ne fa semplicemente un minimum, perchè altrimenti egli non sarebbe certo arrivato alle note formole. Così nella luce è la somma delle azioni avanti e dopo la rifrazione o la riflessione che diventa un minimo; nell'urto ciò non si verifica per la somma delle azioni prima e dopo l'urto, ma qui si deve invece, per ot-

(*) Segue dal principio di Fermat che un raggio di luce, al passare da uno in altro mezzo viene rifratto in modo che i seni dell'angolo d'incidenza e rifrazione stanno fra loro nella ragione diretta delle velocità della luce nel primo e secondo mezzo. Secondo la teoria dell' emissione ha luogo invece il rapporto inverso. Se si vuol arrivare a quest'ultimo, non si ha che (e in ciò sta tutta l'essenza della memoria di Maupertuis), a porre eguale ad un minimo in luogo del tempo che il raggio impiega per arrivare da un dato punto del primo mezzo ad un dato punto dell' altro, cioè in luogo della somma degli spazii percorsi dal raggio nei due mezzi (essendo diviso ogni spazio per la velocità costante con cui vien percorso), la somma dei prodotti della via percorsa e della velocità.

Digitized by Google

tenere le leggi dell' urto, render minima la forza viva del movimento andato perduto per l' urto, mentre si deve considerare come quantità di azione che produce la variazione nell'urto che quella semplicemente, che viene messa in giuoco nell'urto, ma la quale però, fatta diventare minima, dà un risultamento assurdo (*). È poi graziosa la maniera colla quale il d' Arcy atterra quella grande scoperta, che definirebbe il modo d' azione della natura come più economico, con un solo argomento, dimostrando come nella riflessione della luce il principio del Maupertuis può dare egualmente un minimum od un maximum, in guisa che dipende puramente e semplicemente dalla maggiore o minore concavità dello specchio riflettente che questa grande massaja, la natura, agisca colla massima economia, o con uno sciupìo inaudito (**). Anche la legge dell'equilibrio ossia piuttosto la maniera con cui il Maupertuis la applica alla leva, viene sottoposta ad una critica severa. Ed in fatto si rileva da questa applicazione, che il Maupertuis non avea alcuna idea che si possa annettere all'ultima legge un senso esatto, potendosi, cioè come l'Euler dimostrò più tardi, colla proposizione della forza viva giungere a questo risultamento, che nella posizione d'equilibrio la funzione delle forze diventi un maximum od un minimum, proprietà questa dell'equilibrio, che nei casi più semplici osservò per la prima volta lo stesso Maupertuis, che nel 1740 comunicolla all' Accademia di Parigi come « Legge della quiete ». Ma la circostanza che la proposizione non diventa applicabile che a condizione di essere ricondotta ad altra proposizione ben nota, spiega senz' altro il perchè, il nome di principio della minima azione non si sia conservato per la legge statica, ma sia stato limitato in seguito esclusivamente al principio dinamico.

Colla proposizione dell'Euler il principio del Maupertuis non ha che una pura analogia di forma esterna, in quanto che per un movimento uniforme l'integrale Euleriano del prodotto della massa, velocità ed elemento di trajettoria diventa eguale all' azione – talchè più tardi questo integrale fu detto anche azione – ma anche questa analogia scompare completamente se si ricorda il vero significato dell'integrale euleriano. Oltre a ciò l'Euler presuppone il principio della forza viva come condizione necessaria; e Maupertuis cerca l'universalità del suo principio precisamente in ciò che esso sia più generale di quello. Finalmente la forma che il Maupertuis ha dato al suo principio del movimento non ha significato che nel caso di repentine variazioni di velocità, ed egli non ne ottiene sempre che delle equazioni finite, mentre il principio dell' Euler si riferisce esclusivamente ad un moto continuo, e dà le equazioni differenziali della trajettoria (***).

(*) Obbiezioni analoghe fa anche l'Encyclopédie nell'articolo Cosmologie.
(**) Mémoires de l'Académie de Paris 1752. p. 511.
(***) Cfr. per l'ultimo punto: « Carnot, Principes fondamentaux de l'équilibre et du mouvement. » Paris. 1803 » (Préface, pag. 6).

Digitized by Google

Se quindi il Maupertuis nell'appendice alla sua Memoria fa menzione della scoperta dell'Euler come di un' applicazione del suo principio, da cui egli vuol trarre verità d'un grado più elevato e più importante, si dovrebbe aspettarsi che l'Euler considerasse ciò decisamente come un'appropriazione indebita, che egli non poteva respingere come si conveniva per un riguardo al potente preside della sua Accademia, ma contro la quale egli avrebbe almeno protestato col silenzio. Ma l'Euler non tace punto: negli Atti dell'Accademia di Berlino del 1751, i quali però, cosa questa di cui deve tenersene conto, non comparche nel 1753, egli non trova parole sufficienti ad esprimere la sua ammirazione illimitata pel principio del Maupertuis della minima azione, e del suo significato generale, mentre considera la propria proposizione come un caso affatto speciale di questo grande principio.

Per trovare una spiegazione di questo strano contegno dell' Euler, debbo ricordare un altro scritto contro la Memoria del Maupertuis che comparve nel 1751 nel fascicolo di Marzo agli Acta Eruditorum di Lipsia, e che diede origine ad un'aspra lotta, dalla quale i vincitori non uscirono coperti di gloria.

L' Autore di questo secondo attacco, Samuel König, avea dietro a se una vita abbastanza inquieta. Contemporaneo del Maupertuis, discepolo di Giovanni Bernoulli (*) egli era stato più tardi per intrighi politici bandito da Berna sua patria, avea poi per parecchi anni dato lezioni di matematica alla celebre amica del Voltaire la Marchesa di Chatelet, ma anche con questa si era guastato, e finalmente avea ottenuto una posizione stabile come professore nella Università di Franeker. In grazia delle calde raccomandazioni di Daniele Bernoulli era diventato anche Membro straniero dell'Accademia di Berlino. Sulle sue critiche, in gran parte molto ben fondate, le quali si rivolgono principalmente contro la maniera di considerare l'equilibrio, come quella posizione per la quale l'azione diventa un minimo, e contrastano che essa sia più generale del principio della forza viva, io non ho qui bisogno di addentrarmi. Poichè non fu per ciò, ma pel frammento d'una lettera del Leibniz all' Hermann, che il König prepose alla sua dissertazione, che si accese quella celebre lotta, le cui vicende vengono descritte più o meno estesamente in ogni biografia di Voltaire o di Federigo il Grande.

Secondo questa lettera il Leibniz avea già osservato che nelle modificazioni dei movimenti l'azione d'ordinario diventa un maximum ad un minimum e che da ciò, tra l'altre conseguenze importanti può dedursi anche la traiettoria d'un corpo attratto da uno o più centri.

Con ciò fu contrastata all'Euler (**) ed al Maupertuis la priorità delle loro proposizioni. Pure era a priori assai inverosimile che Leibniz avesse fatto sì im-

(*) Fuss. Correspondance t. II, p. 426. Histoire de l'Académie de Berlin 1759, p. 473 e p. 479.
(**) Lettera ad Eulero del 13 Giugno 1744.

Digitized by Google

portanti scoperte e nulla mai ne avesse pubblicato. Il pensiero d'una falsificazione dovea presentarsi spontaneo, e per vero quel frammento di lettera è fuor d'ogni dubbio apocrifo. Ma la prova di ciò non poteva essere addotta. Poichè il König confessava ch'egli non possedeva la lettera che in copia, e colui dal quale egli avea avuto la copia, era stato da più anni decapitato a Berna per tentativi di ribellione. Ma ricerche fatte tra le carte confiscate del giustiziato, come nelle carte lasciate dall'Hermann non potevano, se la lettera era apocrifa, naturalmente offerirne una prova. Ma quando non ostante la mancanza d'una vera prova, l'Accademia di Berlino sulla proposta del Maupertuis il 13 Aprile 1752, dichiarò falsa la lettera in questione (*), e non valido e nullo il suo contenuto, si suscitò contro questo modo di procedere e prima di tutto contro il suo primo autore, uno scoppio generale di malcontento.

Un po' mal disposto dai precedenti del Maupertuis, ma un po' anche per simpatia per l'oppresso, Voltaire a questo punto prende partito per quest'ultimo: dall'altra parte entra nella lotta in favore del Maupertuis il re stesso, il quale leggeva è vero con molto piacere le satire mordaci di Voltaire, ma non voleva poi che il Presidente da Lui stesso preposto alla sua Accademia diventasse il giuoco di tutti, e dopo lo scoppio aperto della seconda satira del Voltaire, la diatriba del D.r Akakia, tutto va a finire colla rottura tra Federigo e Voltaire, talchè l'avversione al Maupertuis ed al giudizio dell'Accademia di Berlino venne a diffondersi sempre più largamente.

Dovetti mandare innanzi un cenno di tutta questa controversia ben poco edificante per far più facilmente capire il come l'Euler potè essere condotto a far causa comune col Maupertuis, e non ostante la completa diversità essenziale delle due proposizioni a sottoporre interamente la sua importante scoperta al vago principio del Maupertuis. L'irritazione avea raggiunto un tal grado che era divenuta impossibile una posizione intermedia tra i due partiti, e non si deve dimenticare che l'Euler, oltre che dalla sua posizione e dalla comune questione della priorità, dovea necessariamente essere spinto ad avvicinarsi alla proposizione del Maupertuis anche da ciò che la memoria del König espone contro il minimum dell'azione nel caso dell'equilibrio. Una cosa sola potrebbe far meraviglia, ed è che l'Euler nella memoria scritta contro König ed in difesa di Maupertuis ignori completamente le cose importanti scritte dal d'Arcy. Ma questo si spiega forse nel modo il più naturale osservando che gli Atti dell'Accademia di Parigi del 1749 portano sul frontespizio la data di pubblicazione del 1753.

Ma sull'Euler deve aver agito in modo decisivo anche un altro motivo. Nella sua Memoria sul principio della minima azione, dopo aver spiegato come la sua proposizione altro non sia che un caso speciale del principio generale del

(*) Histoire de l'Académie de Berlin 1750, pag. 64.

Digitized by Google

Maupertuis, e che fu pubblicata solo dopo di questo, egli aggiunge (*) « oltre di ciò io ho osservato quella bella proprietà non a » priori ma a posteriori ». Questa stima per ciò che era scoperto a priori, la sua nota predilezione per le speculazioni metafisiche è stata pure, io credo, un agente da non trascurarsi, che lo ha spinto ad accostarsi sempre più al principio del Maupertuis. Essa si palesa già nella chiusa della sua Memoria « de motu projectorum » in una maniera nota e ben singolare (**), e indarno vi si oppone Daniele Bernoulli che gli scrive: « il sig. » Rampseck (***) ha scritto a mio padre che Ella prende parte a diverse » controversiis metaphysicis publicis. Ella non dovrebbe inge- » rirsi in tali materie: poichè da Lei non si aspettano che cose sublimi, e non » è possibile riuscire in quelle eccellente ».

Così incontriamo anche nelle memorie dell' Euler sorte per la controversia tra il König ed il Maupertuis, le vere dimostrazioni del principio pel solo caso dell'equilibrio, mentre il caso del movimento viene trattato coll'ardita chiusa: « Se l' intenzione della natura è questa, di risparmiare nell' equili- » brio l'azione delle forze, questa intenzione deve estendersi anche al caso del » movimento (****) ». E non contento di ciò, d'avere cioè basato la legge della quiete su un terreno rigorosamente meccanico, egli cerca subito dopo di darne una dimostrazione puramente metafisica (*****).

S'intende da se che in questa Memoria dell' Euler il principio della minima azione apparisce sempre in una forma assai più intelligibile che in Maupertuis. L'azione viene definita come l'integrale del prodotto, della massa, della velocità e dell'elemento di traiettoria: e non è detto che il principio possa valere senza il principio della forza viva. Ma anche di quella condizione essenziale, che, col mezzo di quest' ultimo principio tutto ciò che è sotto il segno dell' integrale si possa ricondurre a sole grandezze geometriche, non se ne parla mai, e non se ne può parlare, poichè una volta portata in campo avrebbe fatto scomparire ogni apparenza di analogia tra la scoperta dell' Euler ed il principio del Maupertuis. Ma che omettendo questa condizione, la nostra proposizione diventi completamente senza senso apparisce da ciò che nell'integrale dell'azione non figurano le forze operanti sul sistema. È quindi impossibile di ricondurre il problema, di rendere minima l'azione, ad una soluzione che, come la traiettoria del sistema, dipenda essenzialmente dalle forze.

(*) Mémoires de l'Académie de Berlin, 1751 p. 214.
(**) Cfr. Jacobi, Vorles, über Dynamik p. 43. Dühring kritische Geschichte der allgemeinen Principien der Mechanik. Berlin 1873, p. 298.
(***) Lettera del 29 Aprile 1747.
(****) Mémoires de l'Académie de Berlin 1751, p. 175.
(*****) Ib. p. 246.

Digitized by Google

Mentre che così l'Euler si sforzava di mettere sempre più in rilievo a spese del rigore, la necessità metafisica del principio della minima azione, è interessante il vedere come la pensasse affatto diversamente Daniele Bernoulli e com'Egli avesse giustamente riconosciuta la vera natura della proposizione. Egli scrive p. es. al 25 Dicembre 1743 all'Euler così: « Io dubito se » mai alcuno potrà dimostrare a priori che l'elastica debba generare un solido » maximum; io considero ciò come una proprietà che il calcolo dimostra, e che » niuno avrebbe potuto prevedere ex principiis novis precisamente come » identitatem isochronae et brachistochronae. Tali proprietates sono ratione nostri egualmente accidentali, e su questo terreno io » considero anche la observatam proprietatem orbitarum », etc.

Non apparisce se Daniele Bernoulli abbia presentito la piena perfezione della forma analitica che alla meccanica dovea derivare dal calcolo delle variazioni (*) quando Egli con uno speciale riferimento al problema del moto centrale, scrive (12 Dicembre 1742) altrove: « Non si può abbastanza esaminare i principia maximorum et minimorum.... Secondo la mia opinione questo argomento è inter omnia pure analytica utilissimum, ed è questo un vero esempio, che vel sola propositio problematis, se anche non se ne avesse la soluzione, è saepe maxima laude digna ».

Ma ciò che a Daniele Bernoulli può essere balenato alla mente di compiere era serbato ad altri. Quando il Lagrange di 23 anni liberò il calcolo delle variazioni dai vincoli della Geometria, e gli diede la forma analitica presente dovea la sua attenzione rivolgersi alla proposizione dell'Euler, la cui grande importanza formale non potea sfuggire al suo acume non preoccupato da alcuna tendenza metafisica. Nelle Miscellanee di Torino dell'anno 1760–1761 il Lagrange estese non solo, come Egli stesso lo chiama, il principio della minima azione a tutti quei problemi della meccanica, in cui agiscono solo attrazioni reciproche, ed attrazioni verso centri fissi, ma ne trasse anche tutti i grandi risultamenti che Egli dedusse più tardi per altra via nella Mécanique analytique, talchè, come Jacobi osservò giustamente (**), il principio Lagrangiano della minima azione è diventato il padre il tutto nella nostra meccanica analitica.

Ma a quella guisa che dopo che se n'era immischiato il Maupertuis, sedette sul principio della minima azione la mala ventura dell'oscurità, così qui si presenta uno stranissimo fenomeno che cioè, almeno con certezza assoluta, non possiamo definire quale proposizione veramente Lagrange abbia chiamato il principio della minima azione, chè anzi io credo, che il principio a cui Lagrange dovette così bei risultamenti, e che Egli più tardi, come se avesse

(*) Osservazione di Jacobi.
(**) Vorlesungen über Dynamik, p. 2.

Digitized by Google

presentito questa oscurità, e lasciò in abbandono come nol meritava, è una proposizione, per le sue condizioni di validità, al tutto diversa dal principio Eulero–Jacobiano della minima azione, e che anzi è la medesima proposizione che sotto altro nome ha servito di punto di partenza agli ultimi e più importanti progressi della scienza meccanica nel suo indirizzo analitico.

E così, come Lagrange esprime il suo principio, esso non ha alcun significato. Poichè esso lascia completamente da parte quella condizione necessaria che cioè, col mezzo dell'equazione della forza viva, si deve eliminare il tempo dall'integrale dell'azione. Così almeno il Lagrange non può aver pensato il principio. Però l'editore della 3ª edizione della Mécanique analitique, Giuseppe Bertrand, ha già fatto l'osservazione che la considerazione del Lagrange del principio della minima azione non è esatta, e che almeno secondo la dimostrazione che ne dà il Lagrange la proposizione dovrebbe piuttosto suonare così:

« Preso tra due dati termini o valori del tempo l'integrale della doppia » forza viva diventa per l'effettivo movimento del sistema minore che per tutti » gli altri movimenti, che stabilendo nuove combinazioni, potrebbero condurre » il sistema dalla posizione primitiva alla posizione finale senza cangiare l'equa- » zione della forza viva » (*).

Ed infatti si potrebbe da un punto di vista puramente matematico far valere questo principio come una forma equivalente del principio Eulero – Jacobiano. Ma se il Lagrange nella maniera che si è detto avesse prescritto come equazione di condizione l'equazione della forza viva a tutti i movimenti, coi quali deve essere comparato il moto che si verifica effettivamente, la sua dimostrazione del principio sarebbe (come ebbi altra volta occasione di dimostrare) (**) falsa, e falsa siffattamente, che non si ha bisogno di far fare al ragionamento un passo solo per giungere a dimostrare che per esso non deve aversi movimento ma riposo. Ma a tale conclusione non deve essere venuto Lagrange. Secondo il mio modo di vedere non resta che un' uscita, questa cioè che Lagrange, ben lungi dal considerare l'equazione della forza viva come un'equazione di condizione prescritta, l'abbia piuttosto utilizzata per trasformare l'integrale che rappresenta l'azione, in un altro integrale, e precisamente in quello, preso rispetto al tempo, della forza viva più la funzione delle forze (***). Ma se questo aspetto pel quale la dimostrazione di Lagrange diventa com-

---

(*) Mécanique analytique 3. ediz. T. I, pag. 277. Cfr. anche « Handbuch der theoretisch Physik von Thomson und Tait, I Vol. I Parte, p. 259.

(**) Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik. Jahrgang 1871, p. 174.

(***) Non sono veramente gli integrali stessi che Lagrange riconduce gli uni agli altri, ma le loro variazioni.

Digitized by Google

pletamente chiara e rigorosa, è giusto, in allora il principio, a cui dobbiamo le grandi scoperte meccaniche del Lagrange non è altro che quella celebre proposizione effettivamente formulata la prima volta dall'Hamilton (*) nel 1835, la quale riconduce tutti i problemi della meccanica, nei quali però tutte le forze operanti sieno rappresentabili con una funzione delle forze, sia che il principio della forza viva valga o no, al calcolo delle variazioni, e ciò non è altra cosa che il principio dell'Hamilton (**) il quale, per adoperare una frase del Jacobi, sarebbe rimasto dopo la sua scoperta, per 75 anni sepolto.

E così noi vediamo il principio della minima azione sì nella storia come nella scienza giuocare una parte molto oscura e dubbia. Nei suoi primordii esso viene sviluppato in una controversia, la quale in sostanza resa possibile dalla grande oscurità dei concetti che il Maupertuis vi avea introdotto rientra nella scienza colle sue ultime conseguenze; ed in età più matura esso presta alla scienza il maggiore servizio scambiato con altro e maggiore principio. E se noi ci domandiamo ora che significato esso abbia presentemente possiam solo rispondere:

» Il principio della minima azione come fu considerato dall'Euler e dal Ja-
» cobi è una proposizione molto bella, ed in quanto col risparmio di due inte-
» grazioni conduce direttamente alle equazioni differenziali della traiettoria, è
» anche una proposizione molto utile, la quale però di fronte al principio del-
» l'Hamilton ed ai più antichi principii della meccanica in fondo non può
» elevare una giusta pretesa all'alto nome di principio. Per ciò che riguarda la
» forma data dal Bertrand del principio, per la quale però mancherebbe ancora
» la dimostrazione, non è a sperarsi da questa un qualche scopo od utilità.
» Poichè esso non può senza, per così dire, uno spreco sproporzionato di
» spesa, offrire in tutti i casi che in una misura limitata ciò che il principio
» di Hamilton raggiunge in un modo di gran lunga più semplice e naturale. »

Ed ora, dopo aver chiarito il significato meccanico del principio della minima azione, permettiamoci in fine una parola sui concetti metafisici fondamentali del medesimo. Ma non è proprio quella antichissima immagine che ci presenta la natura come una economa lavoratrice, altro che una bella illusione, la quale però ad un più attento esame si scioglie nel nulla? No davvero. Il grande artefice, la natura, mira sempre ad ottenere i suoi scopi col minimo mezzo, ma essa risparmia l'azione, non risparmia forza viva od energia. Essa risparmia piuttosto, come il Gauss ci ha insegnato con una esposizione mirabilmente chiara del principio fondamentale della meccanica, ciò che anche noi uomini dove possiamo qualcosa, cerchiamo risparmiare. Essa risparmia lo sforzo. Ma lo sviluppare ulteriormente questo concetto non appartiene alla storia del principio della minima azione.

(*) Philos. Transactions 1835 I. p. 99.
(**) Jacobi - Vorlesungen über Dynamik p. 58.

Digitized by Google